ESERCIZIO 4

(a) Si definiscano i concetti di: rete di flusso, flusso (in una rete di flusso) e suo valore, taglio e sua capacità. ✓

(b) Si enunci e si dimostri il teorema del *massimo flusso/minimo taglio*. ✓

(c) Si proponga un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità, per determinare un taglio minimo in una rete di flusso di cui sia noto un flusso massimo.

Input : f^* (flusso max)

$\Downarrow$

Output : taglio minimo.

ESERCIZIO 1

Sia $G = (V, E, s, t, c)$ una rete di flusso (con sorgente s, pozzo t e capacità c) e siano $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi in G. Si consideri la funzione $f_1 + f_2$ definita da:

$$(f_1 + f_2)(u, v) =_{Def} f_1(u, v) + f_2(u, v), \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V .$$

(a) Si stabilisca quali proprietà dei flussi sono necessariamente vere per $f_1 + f_2$ e quali no.

(b) Si risponda ai medesimi quesiti per la funzione $\boxed{\lambda f_1 + \mu f_2}$ definita da

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)(u, v) =_{Def} \lambda f_1(u, v) + \mu f_2(u, v), \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V ,$$

dove $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ e $\boxed{\lambda + \mu = 1.}$

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) = \lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v)$$

$$\leq \lambda c(u,v) + \mu c(u,v)$$

$$= (\lambda + \mu)\, c(u,v) = c(u,v)$$

ESERCIZIO 2

Sia $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata sulle coppie ordinate dei vertici di una rete di flusso $G = (V, E)$ con funzione capacità $c : E \to \mathbb{R}_0^+$, sorgente s e pozzo t.

Si proponga un algoritmo efficiente per stabilire se

(a) f è un flusso in (G, c, s, t);

(b) f è un flusso *massimo* in (G, c, s, t)

e se ne valuti la complessità computazionale.

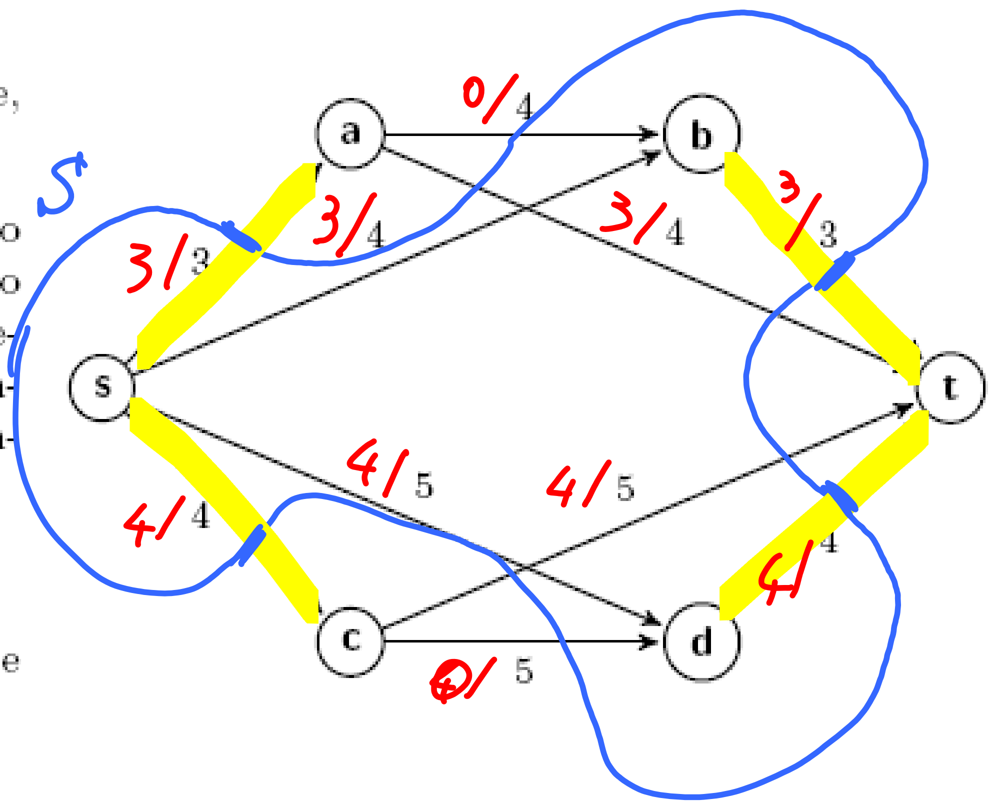
ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Quindi si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (s, a, b, t) precede i cammini (s, b, t) e (s, c, d, t), il cammino (s, c, t) precede il cammino (s, d, t), ma non il cammino (s, c, d, t), ecc.).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G? 14

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima e se ne calcoli la capacità.



$(s, a, b, t) \to 3$
$(s, b, a, t) \to 3$
$(s, c, d, t) \to 4$
$(s, d, c, t) \to 4$

$\overline{\quad 14 \quad}$

$S = \{s, b, d\}$

$T = \{a, c, t\}$

$c(S, T) = 14$